



**زیربرنامه:**

BC \_Inflow3D

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **توسعه دهندگان** | مرتضی نامور |  |
| **تهیه کننده مستند** | مرتضی نامور | |
| **تاریخ تنظیم سند** | 04/11/1394 | |
| **تاییدکنندگان** |  | |
| **شناسه سند** | **MC2F005F1** | |
| **زبان برنامه‌نویسی** | **Fortran 90/95** | |

1. وظایف

در این زیربرنامه متغیرهای بقایی روی مرز ورودی[[1]](#footnote-1) تعیین می­شود.

1. توضیحات و تئوری

معادلات اویلر عبارت است از معادلات پیوستگی، ممنتوم و انرژی. چنان چه مسئله یک بعدی فرض شود معادله ممنتوم فقط یک معادله است. مجموعه معادلات اویلر به صورت زیر است:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که:

چگالی=  ، سرعت=  ، فشار= 

انرژی کل بر واحد حجم=  ، انرژی داخلی بر واحد حجم=  ،

انرژی داخلی بر واحد جرم=  فشار را بر حسب انرژی کل و سرعت می­توان نوشت:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

در معادله ‏(1) ماتریس F را بر حسب W می­توان نوشت:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که  به معنای مولفه iام ماتریس است. ماتریس ژاکوبین شار[[2]](#footnote-2) به صورت زیر تعریف می­شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

با مشتق گیری از معادله ‏(3) ماتریس A حاصل می­شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |



با به دست آوردن ماتریس A، معادله ‏(1) را می­توان به صورت زیر نوشت(با این کار هم مشتق زمانی و هم مشتق مکانی از W گرفته می­شود، در صورتی که در معادله ‏(1) مشتق زمانی از W و مشتق مکانی از F گرفته شده است):

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که A(W) طبق معادله ‏(5) تعریف شده است.

* 1. انتقال معادلات اویلر به فرم اولیه[[3]](#footnote-3)

در مجموعه معادله ‏(6)، متغیرها  ،  و است. دستگاه 3 معادله 3 مجهول است. در معادله دوم و سوم، هر سه متغیر  ،  و ظاهر می­شود. هدف نهایی این است که در هر معادله فقط یک متغیر ظاهر شود. برای این هدف، اول معادلات را به فرم اولیه باید انتقال داد. منظور از فرم اولیه این است که متغیرهای معادلات  ،  و  باشد. در مرجع [2] نحوه انتقال معادلات از یک فرم به فرم دیگر توضیح داده شده است(بخش 16.2.3). در این­جا نیز نحوه انجام این کار توضیح داده می­شود. وقتی معادلات به فرم اولیه انتقال یابند، متغیرهای معادلات حاصله،  ،  و  خواهند بود که در منابع به این متغیرها، متغیرهای اولیه[[4]](#footnote-4) گفته می­شود. ماتریس متغیرهای اولیه عبارت است از:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

برای انجام این انتقال ماتریس ژاکوبین M به صورت زیر تعریف می­شود و به دست می­آید (ماتریس W در معادله ‏(1) و ماتریس V در معادله ‏(7) تعریف شده است):

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که:



با توجه به این­که:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

با کمک معادلات ‏(9)، معادلات ‏(6) بر حسب V نوشته می­شود:



ماتریس­های A و M از معادلات ‏(5) و ‏(8) مشخص هستند. به راحتی با ضرب ماتریس­ها می­توان ماتریس را به دست آورد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

در نتیجه معادلات فرم اولیه به صورت زیر است(همان­طور که مشاهده می­فرمایید متغیرهای معادلات، متغیرهای اولیه یعنی  ،  و  است):

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

* 1. معادلات مشخصه

معادله­ای معادله مشخصه است که به فرم زیر باشد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

 یک متغیر دلخواه است. در این قسمت به هدف نهایی که تبدیل معادلات اویلر به معادلات مشخصه است می­رسیم. اساسا از طریق معادلات مشخصه است که می­توان شیب خطوط مشخصه و متغیری که پیشروی می­کند را به دست آورد. این متغیر در طول خطوط مشخصه ثابت است.

برای تبدیل معادلات ‏(11) به معادلات مشخصه، معادلات ‏(11) باید به ماتریس قطری انتقال یابد[[5]](#footnote-5). چنان­چه با جزئیات این عملیات ماتریسی آشنا نیستید کافی است کلیدواژه diagonalize matrix را جستجو فرمایید. مقدار ویژه ماتریس  برابر است با:

متغیرهای معادلات ‏(11)، با سرعت مقادیر ویژه پیشروی می­کنند. به دلیل این­که این مقادیر ویژه حقیقی است پس معادلات ‏(11) هایپربولیک است. از طرفی به دلیل این­که  ، مجموعه معادله ‏(11) شبه خطی[[6]](#footnote-6) است. بردار ویژه و معکوس آن برابر است با (با داشتن مقادیر ویژه ماتریس ، بردارهای ویژه ماتریس  را به دست آورید و سپس با کنار هم قرار دادن این بردارهای ویژه، ماتریس P تشکیل می­شود. به کمک ماتریس P می­توان معادله ‏(11) را قطری کرد ):

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

با انجام عملیات ماتریسی زیر می­توان ماتریس را قطری کرد(این عملیات ماتریسی جهت قطری کردن ماتریس انجام می­شود):

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که  ماتریس قطری است. با داشتن P می­توان معادله ‏(11) را قطری کرد. در معادله ‏(11) به جای،  جایگذاری می­کنیم:



پس مجموعه معادله مشخصه به صورت زیر است:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

با تبدیل معادلات اویلر به معادلات مشخصه، می­توان گفت که R با سرعت  پیشروی می­کند. سه معادله مشخصه به صورت زیر است:



و ماتریس R طبق معادله ‏(15) () به این صورت محاسبه می­شود:



اکنون به سه معادله­ای که به شکل مشخصه تبدیل شده­اند می­پردازیم.

اول معادله  مورد بررسی قرار می­گیرد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

معادله ‏(16) به صورت معادله مشخصه درآمده است. جهت کسب اطلاعات بیش­تر پیرامون معادله مشخصه، مطالعه فصل دو مرجع 4 توصیه می­شود. اگر در صفحه (x,t)، x و  تابعی از t در نظر گرفته شود، مشتق کامل  عبارت است از:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

با مقایسه معادلات ‏(16) و ‏(17) می­توان نتیجه گرفت که:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

نتیجه ‏(18) نشان می­دهد که  روی خطی با شیب u در صفحه (x,t) ثابت است[4]. می­توان نشان داد که همان انتروپی است[2].

دو معادله دیگر، معادلات ثابت­های ریمان هستند:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

در معادله ‏(19) ،  در خطوط مشخصه با شیب u+c و در معادله ‏(20)،  در خطوط مشخصه با شیب u-c ثابت است. به عبارت دیگر( همان استدلالی که برای معادله ‏(16) استفاده شد اینجا نیز استفاده می­شود یعنی  و x تابعی از t در نظر گرفته می­شوند، سپس مشتق کامل نوشته می­شود و با مقایسه مشتق کامل با معادله ‏(19) می­توان گفت):

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

و در مورد معادله ‏(20) می­توان گفت:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

یعنی در صفحه (x,t)، مقدار  در راستای خطوط مشخصه با شیب u-c ثابت است.

R+ و R­- ثابت­های ریمان هستند که در طول خطوط مشخصه ثابت هستند. برای به دست آوردن ثابت­های ریمان باید از یک رابطه کمکی استفاده کرد. **اگر از رابطه پلی تروپیک جریان گاز استفاده شود، سرعت صوت از رابطه زیر به دست می­آید(به کمک دو رابطه  و  این رابطه اثبات می­شود):**

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

چنان­چه از رابطه ‏(19) و ‏(20) که ثابت­های ریمان تعریف شده است انتگرال بگیریم، با استفاده از رابطه ‏(23) می­توان ثابت­های ریمان را به دست آورد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

اکنون باید به این سوال پاسخ داد که چرا در جریان فروصوت ورودی  از درون دامنه حل برونیابی می­شود؟ اگر به مجموعه معادلات ‏(15) نگاه کنید،  با سرعت  پیشروی می­کند. وقتی جریان فروصوت باشد،  می­شود و در نتیجه  از راست به چپ پشروی می­کند. به عبارت دیگر:

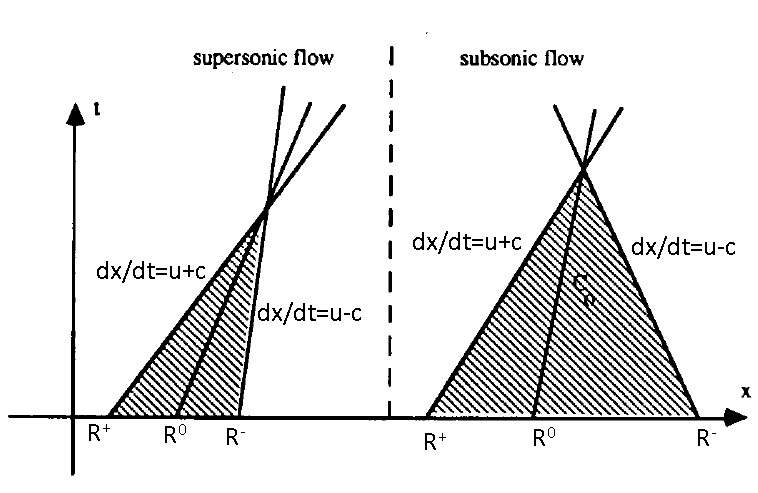
****

 و حتما به سمت راست پیشروی می­کنند زیرا همیشه سرعت پیشروی آن­ها مثبت است( و در هر شرایط مثبت است ).

نتایج به دست آمده از مباحث بالا را می­توان در قالب سه معادله زیر و شیب خطوط مشخصه آن­ها در صفحه (x,t) خلاصه کرد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

**جهت پیشروی خطوط مشخصه در دو حالت فروصوت و فراصوت در ‏شکل (1) نشان داده شده است:**

****

1. جهت پیشروی متغیرهای مشخصه در جریان غیرلزج

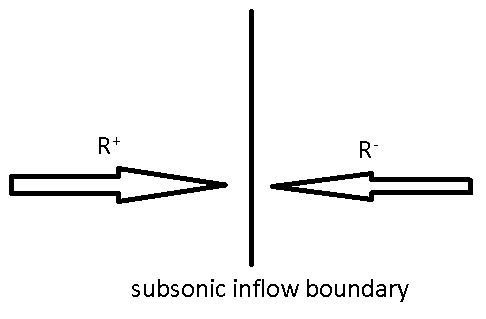
برای استفاده از ثابت ریمان در تعیین شرایط مرزی به این صورت عمل می­شود که مقدار سرعت­های مشخصه تعیین علامت می­شود و بسته به علامت سرعت­های مشخصه می­توان نوع شرط مرزی را مشخص کرد. دو نوع شرط مرزی وجود دارد[2]:

1. **شرط مرزی فیزیکی: در این نوع شرطی مرزی مقدار متغیر مشخص است.**
2. **شرط مرزی عددی: با برون­یابی از درون میدان حل، مقدار متغیر مشخص می­شود.**

حال فرض کنید می­خواهیم از ثابت­های ریمان استفاده کرده و شرط مرزی ورودی برای جریان فروصوت را تعیین کنیم. ابتدا سرعت­های مشخصه را تعیین علامت کرده:

****

سرعت مشخصه v2 منفی شده به این معنا که می­توان برای تعیین شرط مرزی از ثابت ریمان منفی ( ) درون میدان حل استفاده کرد.

****

1. جهت انتشار ثابت ریمان برای مرز ورودی فروصوت
   1. شرایط مرزی جریان فروصوت ورودی

کاربر جهت سرعت در مرز را نسبت به مختصات یا عمود بر مرز باید مشخص کند[3]:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

با فرض جریان آدیاباتیک و آیزنتروپیک آنتالپی کل به صورت زیر است[3]:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

همچنین ثابت ریمان برابر است با[3]:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

لازم به توضیح است که  سرعت عمود بر مرز است که با توجه به بردار عمود بر مرز ورودی،  منفی است.

با فرض جریان آدیاباتیک، آنتالپی در عبور از مرز ثابت است[3]. پس:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

با برون­یابی  از داخل میدان داریم:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

با ترکیب رابطه­ی ‏(30) و ‏(31) داریم:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

با برون یابی  نسبت به مرز به دست می­آید:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

با ترکیب دو معادله بالا :

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

چنان­چه معادله بالا بر اساس  مرتب شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که جواب آن به صورت معادله ‏(36) است:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که:



که بین دو جواب معادله ‏(36)،بزرگ­تر انتخاب می­شود.

سرعت از معادله ‏(37) به دست می­آید:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

و عدد ماخ نیز از رابطه ‏(38) محاسبه می­شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

دما و فشار از رابطه آیزنتروپیک حاصل می­شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

* 1. شرایط مرزی جریان فراصوت ورودی

وقتی جریان ورودی فراصوت باشد، خطوط مشخصه جریان از سمت چپ به سمت راست پیشروی می­کند پس تمام متغیرها باید توسط کاربر تعیین شود[3].

1. بخش­های زیربرنامه

در این قسمت تمام بخش های زیربرنامه مطابق با شماره گذاری موجود در برنامه کامپیوتری ارائه شده است.

1. مقداردهی به دما کل ورودی[[7]](#footnote-7) و فشار کل ورودی[[8]](#footnote-8)

در این قسمت مقدار دمای کل ورودی و فشار کل ورودی توسط کاربر تعیین می­شود. با توجه به این­که دمای ورودی و فشار ورودی برابر با دما و فشار جریان آزاد است، می­توان از معادله ‏(39) و ‏(40) استفاده کرد و دما و فشار کل را محاسبه نمود:





1. انجام محاسبات برای تمام صفحات مرز ورودی

محاسبات مربوط به مرز ورودی برای تمام صفحات ورودی انجام می­شود.

1. محاسبه بردار عمود بر مرز ورودی

در این قسمت بردار عمود بر مرز ورودی محاسبه می­شود.

1. ذخیره متغیرهای سلول کنار مرز ورودی

چگالی، سرعت افقی، سرعت عمودی و فشار سلول مجاور مرز ورودی در RE، UE، VE و PE ذخیره می­شود.

1. محاسبه عدد ماخ سلول مجاور مرز ورودی

ابتدا سرعت صوت­ با استفاده از مقادیر موجود در سلول مجاور محاسبه می­شود و سپس عدد ماخ سلول کنار مرز ورودی محاسبه می­شود.

1. انجام محاسبات برای حالت فروصوت

در صورتی که مرز ورودی فروصوت باشد محاسبات به صورت قسمت 7 تا قسمت 11 انجام می­شود.

1. محاسبه سرعت عمود بر مرز ورودی

در این قسمت سرعت در مرز ورودی در راستای عمود بر مرز محاسبه می­شود.

1. محاسبه مقدار آنتالپی کل و ثابت ریمان منفی برای سلول کنار مرز

از معادله ‏(28) مقدار آنتالپی کل و از معادله ‏(29) مقدار ثابت ریمان منفی برای سلول کنار مرز محاسبه می­شود.

1. برونیابی انتالپی کل و ثابت ریمان برای مرز

در این قسمت انتالپی کل و ثابت ریمان منفی از داخل مرز برونیابی می­شود.

1. محاسبه سرعت صوت مرز

با داشتن مقدار انتالپی کل و ثابت ریمان طبق معادله ‏(36) سرعت صوت روی مرز محاسبه می­شود.

1. محاسبه چگالی سرعت، عدد ماخ، فشار و دمای روی مرز

طبق معادله ‏(37) تا معادله ‏(40)، سرعت عمود بر مرز، عدد ماخ، فشار، دما و چگالی مرز محاسبه می­شود. سپس با توجه به زاویه جریان ورودی، میزان سرعت افقی و عمودی محاسبه می­شود.

1. محاسبه متغیرها اگر جریان فراصوت باشد

چنانچه جریان ورودی فراصوت باشد تمام مقادیر روی مرز برابر مقدار آن در جریان آزاد قرار داده می­شود.

1. محاسبه انرژی

با داشتن سرعت و فشار روی مرز، انرژی روی مرز محاسبه می­شود.

1. ذخیره متغیرهای بقایی و فشار در آرایه مربوط به مقادیر مرزی

در انتها، متغیرهای بقایی و فشار روی مرز در آرایه مربوطه ذخیره می­گردد.

1. مراجع

1. Hirsch, Charles. Numerical Computation of Internal and External Flows: The Fundamentals of Computational Fluid Dynamics: The Fundamentals of Computational Fluid Dynamics. Butterworth-Heinemann, 2007.

2. Hirsch, Ch. "Numerical Computation of Internal and External Flows, Vol. 1 Fundamentals of Numerical Discretization, Vol. 2 Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows." (1988).

3. Carlson, Jan-Reneé. "Inflow/outflow boundary conditions with application to FUN3D." (2011).

4. Whitham, G. B. Linear and Nonlinear Waves. 1999.

1. Inflow Boundary [↑](#footnote-ref-1)
2. Flux Jacobian [↑](#footnote-ref-2)
3. Primitive form [↑](#footnote-ref-3)
4. Primitive variables [↑](#footnote-ref-4)
5. Diagonalize [↑](#footnote-ref-5)
6. Quasi-Linear [↑](#footnote-ref-6)
7. ITT(Inflow Total Temperature) [↑](#footnote-ref-7)
8. ITP(Inflow Total Pressure) [↑](#footnote-ref-8)